PLAN WYNIKOWY

(zakres podstawowy)

klasa 1.

Wstęp

Plan wynikowy kształcenia matematycznego jest dostosowany do programu nauczania matematyki w liceach i technikach – zakres podstawowy, autorstwa Marcina Kurczaba, Elżbiety Kurczab i Elżbiety Świdy, zamieszczonego na stronie internetowej www.pazdro.com.pl wiosną 2012 roku. Jest on przeznaczony dla nauczycieli oraz uczniów pracujących z podręcznikiem „Matematyka. Podręcznik do liceów i techników. Zakres podstawowy" – numer ewidencyjny w wykazie podręczników: 412/1/2012 oraz zbiorami zadań do matematyki, autorstwa Elżbiety Kurczab, Marcina Kurczaba i Elżbiety Świdy, wydanymi przez Oficynę Edukacyjną * Krzysztof Pazdro.

Plan jest wykazem wiadomości i umiejętności, jakie powinien mieć uczeń ubiegający się o określone oceny na poszczególnych etapach edukacji w liceum lub w technikum.

Wymagania stawiane przed uczniem podzieliliśmy na trzy grupy:
- Wymagania podstawowe (zawierają wymagania konieczne);
- Wymagania dopełniające (zawierają wymagania rozszerzające);
- Wymagania wykraczające.

Wymagania wykraczające zawierają w sobie wymagania dopełniające, te zaś zawierają wymagania podstawowe.
Ocenę dopuszczającą powinien otrzymać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące 40–50% wymagań podstawowych, zaś ocenę dostateczną uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące 51-71% wymagań podstawowych.
Ocenę dobrą powinien otrzymać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące do 89% wymagań dopełniających, zaś ocenę bardzo dobrą uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące powyżej 89% wymagań dopełniających.
Ocenę celującą powinien uzyskać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności zawarte w wymaganiach wykraczających.

Aby ułatwić nauczycielom, uczniom i ich rodzicom korzystanie z planu wynikowego, dla poszczególnych wymagań przedstawiamy przykładowe zadania, które dokładniej określają stopień trudności problemów wymaganych na poszczególne oceny. Przedstawione zadania **nie mogą** w żadnym wypadku stanowić przykładowego zbioru zadań, z którego nauczyciel powinien czerpać zadania na ewentualny egzamin sprawdzający, lecz mają jedynie wskazać stopień trudności zadań na poszczególne oceny.
Plan wynikowy nie może być „dokumentem sztywnym”. Zakładamy, że każdy nauczyciel zmodyfikuje ten plan, dostosowując go zarówno do liczby godzin przeznaczonych na realizację materiału, jak i do możliwości uczniów.

Spis treści

1. Wprowadzenie do matematyki. Pojęcia podstawowe

Tematyka zajęć:

- Zdanie. Zaprzeczenie zdania
- Koniunkcja zdań. Alternatywa zdań
- Implikacja. Równoważność zdań. Definicja. Twierdzenie
- Prawa logiczne. Prawa De Morgana
- Zbiór. Działania na zbiorach
- Zbiory liczbowe. Oś liczbowa
- Rozwiązywanie prostych równań
- Przedziały
- Rozwiązywanie prostych nierówności
- Zdanie z kwantyfikatorem

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi odróżnić zdanie logiczne od innej wypowiedzi; – umie określić wartość logiczną zdania prostego; – potrafi zanegować zdanie proste i określić wartość logiczną zdania zanegowanego; – potrafi rozpoznać zdania w postaci koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności zdań; – potrafi zbudować zdania złożone w postaci koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności zdań z danych zdań prostych; – potrafi określić wartości logiczne zdań złożonych, takich jak koniunkcja, alternatywa, implikacja i równoważność zdań; – potrafi odróżnić definicję od twierdzenia; – zna prawa De Morgana (prawo negacji	Uczeń: – potrafi budować zdania złożone i oceniać ich wartości logiczne; – potrafi wnioskować o wartościach zdań składowych wybranych zdań złożonych na podstawie informacji o wartościach logicznych zdań złożonych; – rozumie budowę twierdzenia matematycznego; potrafi wskazać jego założenie i tezę; – potrafi zbudować twierdzenie odwrotne do danego oraz ocenić prawdziwość twierdzenia prostego i odwrotnego; – potrafi sprawnie posługiwać się symboliką matematyczną dotyczącą zbiorów; – potrafi podać przykłady zbiorów A i B, jeśli dana jest suma $A \cup B$, iloczyn $A \cap B$ albo różnica $A - B$;	Uczeń: – potrafi negować zdania złożone z koniunkcji i/lub alternatyw zdań; – potrafi stosować wiadomości z logiki do wnioskowania matematycznego; – potrafi stosować działania na zbiorach do wnioskowania na temat własności tych zbiorów; – potrafi określić dziedzinę i zbiór elementów spełniających równanie z jedną niewiadomą, zawierające wyrażenia wymierne lub pierwiastek stopnia drugiego; – zna prawa De Morgana dla zdań z kwantyfikatorem; – potrafi podać negację zdania z kwantyfikatorem i ocenić jej wartość logiczną.

alternatywy oraz prawo negacji koniunkcji) i potrafi je stosować; – potrafi określić wartość logiczną zdania, które jest negacją koniunkcji, oraz zdania, które jest negacją alternatywy zdań prostych; – zna takie pojęcia, jak: zbiór pusty, zbiory równe, podzbiór zbioru; – zna symbolikę matematyczną dotyczącą zbiorów ($\in$, $\notin$, $\cup$, $\cap$, $-$, $\subset$, $\not\subset$); – potrafi podać przykłady zbiorów (w tym przykłady zbiorów skończonych oraz nieskończonych); – potrafi określić relację pomiędzy elementem i zbiorem; – potrafi określać relacje pomiędzy zbiorami (równość zbiorów, zawieranie się zbiorów, rozłączność zbiorów); – zna definicję sumy, iloczynu, różnicy zbiorów; – potrafi wyznaczać sumę, iloczyn i różnicę zbiorów skończonych; – potrafi wyznaczyć sumę, różnicę oraz część wspólną podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych: ***N***, ***C***, ***NW***, ***W***; – potrafi rozróżniać liczby naturalne, całkowite, wymierne, niewymierne; – potrafi przedstawić liczbę wymierną w postaci ułamka zwykłego i w postaci rozwinięcia dziesiętnego; – umie zamienić ułamek o rozwinięciu dziesiętnym nieskończonym okresowym na ułamek zwykły; – potrafi zaznaczać liczby wymierne na osi liczbowej; – rozumie pojęcie przedziału, rozpoznaje	– zna pojęcie dopełnienia zbioru i potrafi zastosować je w działaniach na zbiorach; – potrafi wyznaczyć dopełnienie przedziału lub dopełnienie zbioru liczbowego skończonego w przestrzeni ***R***; – potrafi przeprowadzić proste dowody, w tym dowody „nie wprost”, dotyczące własności liczb rzeczywistych; – potrafi oceniać wartości logiczne zdań, w których występują zależności pomiędzy podzbiorami zbioru ***R***; – potrafi wyznaczyć dziedzinę równania z jedną niewiadomą, w przypadku, gdy trzeba rozwiązać koniunkcję warunków; – potrafi podać przykład równania sprzecznego oraz równania tożsamościowego; – potrafi wskazać przykład nierówności sprzecznej oraz nierówności tożsamościowej; – rozumie zwrot „dla każdego *x* ....” oraz „istnieje takie *x*, że ....” i potrafi stosować te zwroty w budowaniu zdań logicznych; – potrafi ocenić wartość logiczną zdania z kwantyfikatorem.	

przedziały ograniczone i nieograniczone; – potrafi zapisać za pomocą przedziałów zbiory opisane nierównościami; – potrafi zaznaczyć na osi liczbowej podany przedział liczbowy; – potrafi wyznaczyć sumę, różnicę oraz część wspólną przedziałów; – wie, co to jest równanie (nierówność) z jedną niewiadomą; – potrafi określić dziedzinę równania; – zna definicję rozwiązania równania (nierówności) z jedną niewiadomą; –wie, jakie równanie nazywamy równaniem sprzecznym, a jakie równaniem tożsamościowym; –wie, jaką nierówność nazywamy sprzeczną, a jaką nierównością tożsamościową.		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Wśród poniższych wypowiedzi znajdują się zdania logiczne. Wskaż je. Oceń wartości logiczne zdań. 1) Wyjdź do ogrodu! 2) Czy dzisiaj jest klasówka z matematyki? 3) Liczba 3 jest większa od liczby 8. 4) Liczba *a* jest liczbą parzystą. 5) Warszawa jest stolicą Polski. <u>Zadanie 2.</u> Dane jest zdanie: „2 jest liczbą parzystą i liczba 5 nie jest podzielna przez 3”. a) Oceń wartość logiczną zdania.	<u>Zadanie 1.</u> Wiadomo, że poniższe zdania złożone są fałszywe. Co można powiedzieć o zdaniach prostych tworzących dane zdania? a) Ania poszła do Kasi lub Ania poszła do Oli. b) Jeśli Bartek będzie grał w gry komputerowe, to nie pójdzie do kina. <u>Zadanie 2.</u> Oceń wartość logiczną danego twierdzenia. Następnie sformułuj twierdzenie odwrotne do danego i określ, czy jest ono fałszywe, czy prawdziwe. a) Jeśli liczba całkowita jest podzielna przez 3	<u>Zadanie 1.</u> Napisz negację zdania: a) Pojadę na wieś lub zostanę w domu i posprzątam swój pokój. b) Nie wyjdę z domu i obejrzę film lub poczytam książkę. <u>Zadanie 2.</u> Co można powiedzieć o zbiorach *A* i *B*, jeśli: a) $A \cap B = B$; b) $A \cup B \subset A$; c) $A - B = A \cap B$? <u>Zadanie 3.</u> Podaj przykład równania z jedną niewiadomą, którego dziedziną jest zbiór:

b) Napisz zaprzeczenie zdania; podaj prawo logiczne, z którego skorzystałeś.

Zadanie 3.

Oceń wartość logiczną zdań:

a) $-3^2 = 9$ b) $1^3 - 2^3 \neq (-1)^3$

c) $3 \cdot (1-8) \leq -3 \cdot (8-1)$

Zadanie 4.

a) Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $C \cap D$, $A - C$, jeśli:
$A = \{-3, -2, -1, 3, 4\}$, $B = \{-2, 0, 1, 3\}$,
$C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

b) Wykonaj działania na zbiorach:
$\boldsymbol{C} - \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{W} \cup \boldsymbol{NW}$, $\boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{R}$.

c) Wykonaj działania na przedziałach:
$(2, 5) \cup \langle 3, 8\rangle$; $(-\infty, 3) - (0, 9\rangle$;
$(-7, 8\rangle \cap \langle -7, +\infty)$.

Zadanie 5.

Przedstaw liczbę 2,3(04) w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego. Czy dana liczba jest wymierna czy niewymierna?

Zadanie 6.

Dane jest równanie z niewiadomą x:
$x - \sqrt{3} = 3$.

a) Podaj dziedzinę tego równania.

b) Jaka liczba spełnia to równanie?

i przez 7, to liczba ta jest podzielna przez 21.

b) Jeśli liczba naturalna jest podzielna przez 3 i przez 6, to liczba ta jest podzielna przez 18.

Zadanie 3.

Zbiór $A \cup B$ ma 7 elementów, zbiór B ma 4 elementy, zaś zbiór A ma 5 elementów. Ile elementów ma zbiór $A \cap B$?

Zadanie 4

Wiedząc, że π jest liczbą niewymierną, wykaż, że liczba $2\pi - 1$ też jest liczbą niewymierną.

Zadanie 5.

a) Wyznacz zbiory:
$(-3, 2\rangle \cap \boldsymbol{N}$; $\boldsymbol{C} - (5, +\infty)$; $\boldsymbol{C}_+ \cup \langle 4, +\infty)$;
$(2, 5) - \boldsymbol{N}$.

b) Znajdź dopełnienie danego zbioru w przestrzeni $\boldsymbol{R}$: $A = \langle -7, +\infty)$; $B = \{-4, 3, 5\}$,
$C = (2, 8) \cup \{0\}$.

Zadanie 6.

Podaj przykład równania:

a) którego zbiór rozwiązań jest jednoelementowy;

b) którego zbiór rozwiązań jest dwuelementowy;

c) które jest sprzeczne;

d) które jest tożsamościowe.

Zadanie 7.

Dana jest równanie z niewiadomą x:
$(x-3)(x+2) = 0$.

a) Określ dziedzinę równania.

b) Podaj zbiór rozwiązań równania.

a) $\boldsymbol{R} - \{-3, 0\}$ i które ma tylko dwa rozwiązania: 2, 3;

b) $\langle 2, +\infty)$ i które ma tylko jedno rozwiązanie 2.

Zadanie 4.

Określ wartość logiczną zdania i podaj jego zaprzeczenie:

a) $\bigwedge_{x \in \boldsymbol{N}} (x + 2 > 0 \wedge x < 1000)$;

b) $\bigvee_{x \in \boldsymbol{C}_+} \left(\frac{x}{2} > 1 \vee x \leq 0\right)$.

	Zadanie 7. Oceń wartość logiczną zdania: „Dla dowolnej liczby rzeczywistej *x* prawdziwa jest nierówność: $x^2>0$".	

2. Działania w zbiorach liczbowych

Tematyka zajęć:
- Zbiór liczb naturalnych i zbiór liczb całkowitych
- Zbiór liczb wymiernych i zbiór liczb niewymiernych
- Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych
- Rozwiązywanie równań – metoda równań równoważnych
- Rozwiązywanie nierówności – metoda nierówności równoważnych
- Procenty
- Punkty procentowe
- Wartość bezwzględna. Proste równania i nierówności z wartością bezwzględną
- Przybliżenia, błąd bezwzględny i błąd względny, szacowanie

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi wskazać liczby pierwsze i liczby złożone; – zna i potrafi stosować cechy podzielności liczb naturalnych (przez 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10); – potrafi rozłożyć liczbę naturalną na czynniki pierwsze; – potrafi wyznaczyć największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność liczb naturalnych; – potrafi wykonać dzielenie z resztą w zbiorze liczb naturalnych;	Uczeń: – zna i stosuje w obliczeniach zależność dotyczącą liczb naturalnych różnych od zera: $NWD(a, b) \cdot NWW(a, b) = a \cdot b$; – potrafi podać zapis symboliczny wybranych liczb, np. liczby parzystej, liczby nieparzystej, liczby podzielnej przez daną liczbę całkowitą, wielokrotności danej liczby; zapis liczby, która w wyniku dzielenia przez daną liczbę naturalną daje wskazaną resztę; – potrafi zapisać symbolicznie zbiór na	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe o podwyższonym stopniu trudności, dotyczące własności liczb rzeczywistych; – potrafi wykonać dzielenie z resztą w zbiorze liczb całkowitych ujemnych; – potrafi rozwiązać równania z wartością bezwzględną typu: $\|y\| + \|z\| = 0$.

– zna definicję liczby całkowitej parzystej oraz nieparzystej; – potrafi sprawnie wykonywać działania na ułamkach zwykłych i na ułamkach dziesiętnych; – zna i stosuje w obliczeniach kolejność działań i prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych; – potrafi porównywać liczby rzeczywiste; – zna własność proporcji i potrafi stosować ją do rozwiązywania równań zawierających proporcje; – zna twierdzenia pozwalające przekształcać w sposób równoważny równania i nierówności; – potrafi rozwiązywać równania z jedną niewiadomą metodą równań równoważnych; – potrafi rozwiązywać nierówności z jedną niewiadomą metodą nierówności równoważnych; – potrafi obliczyć procent danej liczby, a także wyznaczyć liczbę, gdy dany jest jej procent; – potrafi obliczyć, jakim procentem danej liczby jest druga dana liczba; – potrafi określić, o ile procent dana wielkość jest większa (mniejsza) od innej wielkości; – potrafi posługiwać się procentem w prostych zadaniach tekstowych (w tym wzrosty i spadki cen, podatki, kredyty i lokaty); – rozumie pojęcie punktu procentowego i potrafi się nim posługiwać; – potrafi odczytywać dane w postaci tabel i diagramów, a także przedstawiać dane w postaci diagramów procentowych; – potrafi odczytywać dane przedstawione w tabeli lub na diagramie i przeprowadzać analizę procentową przedstawionych danych; – zna definicję wartości bezwzględnej liczby	podstawie informacji o jego elementach; – potrafi wymienić elementy zbioru zapisanego symbolicznie; – potrafi wykazać podzielność liczb całkowitych, zapisanych symbolicznie; – umie podać część całkowitą każdej liczby rzeczywistej i część ułamkową liczby wymiernej; - wie, kiedy dwa równania (dwie nierówności) są równoważne i potrafi wskazać równania (nierówności) równoważne; – potrafi rozwiązać proste równania wymierne typu $\frac{2}{x+7}=\frac{1}{4}$; $\frac{x-5}{x-2}=0$ – rozumie zmiany bankowych stóp procentowych i umie wyrażać je w punktach procentowych (oraz bazowych); – potrafi zaznaczyć na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności z wartością bezwzględną typu: $\mid x-a\mid = b$, $\mid x-a\mid < b$, $\mid x-a\mid > b$, $\mid x-a\mid \leq b$, $\mid x-a\mid \geq b$ – potrafi na podstawie zbioru rozwiązań nierówności z wartością bezwzględną zapisać tę nierówność; – potrafi oszacować wartość liczby niewymiernej.	

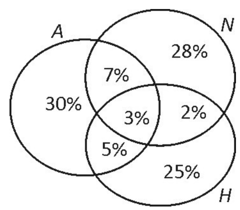
rzeczywistej i jej interpretację geometryczną; – potrafi obliczyć wartość bezwzględną liczby; – umie zapisać i obliczyć odległość na osi liczbowej między dwoma dowolnymi punktami; – potrafi wyznaczyć przybliżenie dziesiętne liczby rzeczywistej z żądaną dokładnością; – potrafi obliczyć błąd bezwzględny i błąd względny danego przybliżenia; – potrafi obliczyć błąd procentowy przybliżenia; – potrafi szacować wartości wyrażeń.		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Bartek i Jurek postanowili zmierzyć odległość namiotu od przystani za pomocą swoich kroków. Bartek stawia kroki o długości 48 cm, natomiast Jurek o długości 56 cm. W jakiej odległości od namiotu znajduje się przystań, jeśli ślady stóp chłopców pokryły się 15 razy? Wynik wyraź w metrach. <u>Zadanie 2.</u> Znajdź liczbę wymierną, która znajduje się na osi liczbowej między liczbami: a) $\frac{1}{8}$ i $\frac{1}{6}$; b) $\frac{5}{7}$ i $\frac{6}{7}$; c) $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$. <u>Zadanie 3.</u> a) Rozwiąż nierówność: $\frac{x-2}{3}-\frac{x+5}{2}>5-x$ b) Podaj najmniejszą liczbę pierwszą spełniającą tę nierówność.	<u>Zadanie 1.</u> Wyznacz zbiory $(A \cap B) - D$, $A \cup B$, $(A - B) - D$, jeśli: $A = \{x: x \in \boldsymbol{C}$ i $x \in \langle -3, 4)\}$, $B = (-1, 2\rangle$, $D = \{x : x \in \boldsymbol{R}$ i $\lvert x-2\rvert = 4\}$ <u>Zadanie 2.</u> Wykaż, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3. <u>Zadanie 3.</u> Korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej, rozwiąż równanie: $\lvert x+3{,}5\rvert = 5$. a) Podaj najmniejszą liczbę pierwszą, która jest większa od rozwiązań tego równania. b) Wyznacz odwrotność liczby $\frac{\lvert a-b\rvert}{4}$, gdzie a, b są rozwiązaniami danego równania. <u>Zadanie 4.</u>	<u>Zadanie 1.</u> Iloczyn dwóch liczb naturalnych dodatnich wynosi 1728, a największy ich wspólny dzielnik równa się 24. Znajdź te liczby. <u>Zadanie 2.</u> Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych, spełniających równanie: $x - y = xy$. <u>Zadanie 3.</u> Wykaż, że reszta z dzielenia przez 3 sumy kwadratów trzech dowolnych kolejnych liczb naturalnych wynosi 2. <u>Zadanie 4.</u> Rozwiąż: a) równanie $\lvert x+1\rvert + \lvert x^2-1\rvert = 0$ b) nierówność $\lvert 2-x\rvert + \lvert x\cdot(x-2)\rvert \le 0$.

Zadanie 4.
Jabłka zdrożały o 20% i wówczas cena jednego kilograma jabłek wynosiła 4,80 zł. O ile procent cena jabłek przed podwyżką była niższa niż po podwyżce?

Zadanie 5.
Uczestnicy obozu językowego posługiwali się trzema językami obcymi: angielskim (*A*), hiszpańskim (*H*) i niemieckim (*N*), zgodnie z następującym podziałem procentowym:



a) Jaki procent wszystkich uczestników obozu znało język angielski?
b) Jaki procent osób znających język niemiecki znało również pozostałe dwa języki?
c) O ile punktów procentowych więcej było na obozie osób ze znajomością tylko języka angielskiego od osób, które znały tylko język hiszpański?
d) O ile procent mniej było na obozie uczniów, którzy znali tylko język hiszpański od uczniów, którzy znali język angielski lub niemiecki?

Zadanie 6.
a) Porównaj liczby:

a) Oblicz: $|2 - 3\sqrt{3}|$.
b) Rozwiąż nierówność: $|x + 3| \geq 4$.
c) Przedział liczbowy $(-5, 7)$ jest zbiorem rozwiązań pewnej nierówności z wartością bezwzględną. Zapisz tę nierówność.

Zadanie 5.
Sprawdź (nie używając kalkulatora), czy liczba $\frac{2\sqrt{5}-1}{5}$ należy do przedziału $\left(\frac{3}{5}, 1\right)$.

$a = \lvert \frac{\sqrt{5}}{5} - 1 \rvert$ oraz $b = \lvert -1{,}5 \rvert$; b) Oblicz odległość między liczbami –6 i 12; c) Rozwiąż równanie $\lvert x \rvert = 3$ i nierówność $\lvert x \rvert < 5$. <u>Zadanie 7.</u> Na zawodach w skokach narciarskich komentator sportowy ocenił pierwszy skok zawodnika na 122 m, podczas gdy skoczek osiągnął długość skoku równą 124,5 m. Drugi skok miał długość 123,5 m, zaś komentator ocenił go na 126 m. W którym przypadku komentator popełnił większy błąd?		

3. Wyrażenia algebraiczne

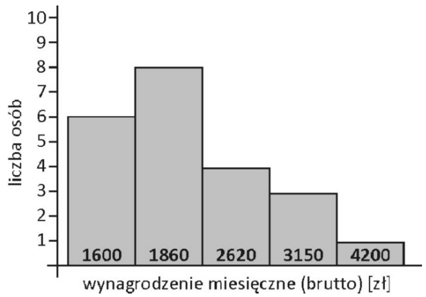
Tematyka zajęć:
- Potęga o wykładniku naturalnym
- Pierwiastek arytmetyczny. Pierwiastek stopnia nieparzystego z liczby ujemnej
- Działania na wyrażeniach algebraicznych
- Wzory skróconego mnożenia
- Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym
- Potęga o wykładniku wymiernym
- Potęga o wykładniku rzeczywistym
- Dowodzenie twierdzeń
- Określenie logarytmu
- Zastosowanie logarytmów
- Przekształcanie wzorów
- Średnie

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi wykonywać działania na potęgach o wykładniku naturalnym, całkowitym i wymiernym; – zna prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i stosuje je w obliczeniach; – potrafi zapisać liczbę w notacji wykładniczej; – sprawnie sprowadza wyrażenia algebraiczne do najprostszej postaci i oblicza ich wartości dla podanych wartości zmiennych; – potrafi wyłączać wspólny czynnik z różnych wyrażeń; – potrafi sprawnie posługiwać się wzorami skróconego mnożenia: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ i sprawnie wykonuje działania na wyrażeniach, które zawierają wymienione wzory skróconego mnożenia; – potrafi usuwać niewymierność z mianownika ułamka, stosując wzór skróconego mnożenia (różnicę kwadratów dwóch wyrażeń); – zna pojęcie pierwiastka arytmetycznego z liczby nieujemnej i potrafi stosować prawa działań na pierwiastkach w obliczeniach; – potrafi obliczać pierwiastki stopnia nieparzystego z liczb ujemnych; – potrafi dowodzić proste twierdzenia; – zna definicję logarytmu i potrafi obliczać logarytmy bezpośrednio z definicji; – sprawnie przekształca wzory matematyczne,	Uczeń: – sprawnie przekształca wyrażenia algebraiczne zawierające potęgi i pierwiastki; – sprawnie zamienia pierwiastki arytmetyczne na potęgi o wykładniku wymiernym i odwrotnie; – sprawnie wykonywać działania na potęgach o wykładniku rzeczywistym; – potrafi wyłączać wspólną potęgę poza nawias; – potrafi rozłożyć wyrażenia na czynniki metodą grupowania wyrazów lub za pomocą wzorów skróconego mnożenia; – potrafi oszacować wartość potęgi o wykładniku rzeczywistym; – potrafi dowodzić twierdzenia, posługując się dowodem wprost; – potrafi dowodzić twierdzenia, posługując się dowodem nie wprost; – zna i potrafi stosować własności logarytmów w obliczeniach; – stosuje średnią arytmetyczną, średnią ważoną i średnią geometryczną w zadaniach tekstowych.	Uczeń: – potrafi sprawnie działać na wyrażeniach zawierających potęgi i pierwiastki z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia; – potrafi sprawnie rozkładać wyrażenia zawierające potęgi i pierwiastki na czynniki, stosując jednocześnie wzory skróconego mnożenia i metodę grupowania wyrazów; – potrafi wykorzystać pojęcie logarytmu (a także cechy i mantysy logarytmu dziesiętnego) w zadaniach praktycznych.

fizyczne i chemiczne; – zna pojęcie średniej arytmetycznej, średniej ważonej i średniej geometrycznej liczb oraz potrafi obliczyć te średnie dla podanych liczb.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Oblicz wartość wyrażenia: $8^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3^2+4^2} + \left(\frac{1}{9^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \left(27^{-\frac{2}{3}}\right) + \sqrt[3]{-64}$ Zadanie 2. Usuń niewymierność z mianownika ułamka: a) $\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{8}-4}{2-\sqrt{2}}$ Zadanie 3. Wyłącz wspólny czynnik poza nawias: a) $(a-b)-(a-b)^2$ b) $(b-a)xy+(a-b)xyz-(b-a)z^2$ Zadanie 4. Wykaż, że jeśli a i b są liczbami dodatnimi to $a+b \geq 2\sqrt{ab}$. Zadanie 5. Oblicz: $3\log(\log_2 32 \cdot \log_5 25)$. Zadanie 6. Wyznacz podaną wielkość ze wzoru: a) $\frac{1}{f}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; f b) $P=2\pi r(r+h)$; h	Zadanie 1. Sprowadź wyrażenie: $[y^3 : (y^2 \cdot y^{-3})]^4 : \left[\left(\frac{1}{y}\right)^4 \cdot \frac{1}{y^{-2}}\right]^{-3}$ do najprostszej postaci i oblicz jego wartość dla $y=\sqrt{2\sqrt{2}}$. Zadanie 2. Wykaż, że liczba $6^{20}+3 \cdot 6^{19}-4 \cdot 6^{18}$ jest podzielna przez 5. Zadanie 3. Oblicz (bez użycia kalkulatora) przybliżoną wartość potęgi: $0{,}0001^{-\sqrt{5}}$, jeśli $\sqrt{5} \approx 2{,}25$. Zadanie 4. Wykaż, że jeśli $a+b=1$ i $a^2+b^2=5$, to $a^4+b^4=17$. Zadanie 5. Wykaż, stosując dowód nie wprost, że jeśli liczby a i b są dodatnie, to $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$. Zadanie 6. Niech $\log 2 = a$ i $\log 3 = b$. Wyraź za pomocą a i b wyrażenie: $\log 8 \cdot \log_8 6$.	Zadanie 1. Oblicz wartość wyrażenia: $\left[\left(4-12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(4+12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$ Zadanie 2. Wykaż, że liczba $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt[4]{4}$ jest całkowita. Zadanie 3. Rozłóż na czynniki wyrażenia: a) x^4+1 b) $x^6-2x^4-2x^2+4$ Zadanie 4. Oblicz wartość pH kwasu solnego, wiedząc, że stężenie jonów wodorowych w tym kwasie jest równe 0,05 mol/dm^3. Wynik podaj w przybliżeniu dziesiętnym, z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

<u>Zadanie 7.</u> Poniższy diagram przedstawia wynagrodzenie brutto pracowników pewnej firmy w tym miesiącu.  a) Oblicz średnie wynagrodzenie brutto w tej firmie. b) Podaj, jaki procent pracowników zarabia więcej, niż wynosi średnie wynagrodzenie w tej firmie. c) Od przyszłego miesiąca każdy pracownik ma zarabiać o 100 zł więcej, niż w tym miesiącu. Oblicz średni procent, o jaki planowany jest wzrost wynagrodzeń w tej firmie. Wyniki podaj w przybliżeniu dziesiętnym, z dokładnością do 0,1%.	<u>Zadanie 7.</u> Na wycieczkę w góry pojechało 21 osób o średniej wieku 23 lata. Średnia ta wzrosła do 24 lat, po doliczeniu wieku przewodnika, który dołączył do wycieczki w Zakopanem. Ile lat miał przewodnik?	

4. Geometria płaska – pojęcia wstępne

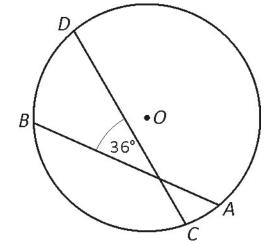
Tematyka zajęć:
- Punkt, prosta, odcinek, półprosta, kąt, figura wypukła, figura ograniczona
- Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie, odległość punktu od prostej, odległość między prostymi równoległymi, symetralna odcinka, dwusieczna kąta
- Dwie proste przecięte trzecią prostą
- Twierdzenie Talesa
- Okrąg i koło
- Kąty i koła

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna figury podstawowe (punkt, prosta, płaszczyzna, przestrzeń) i potrafi zapisać relacje między nimi; – zna pojęcie figury wypukłej i wklęsłej; potrafi podać przykłady takich figur; – zna pojęcie figury ograniczonej i figury nieograniczonej, potrafi podać przykłady takich figur; – umie określić położenie prostych na płaszczyźnie; – rozumie pojęcie odległości, umie wyznaczyć odległość dwóch punktów, punktu od prostej, dwóch prostych równoległych; – zna określenie kąta i podział kątów ze względu na ich miarę; – zna pojęcie kątów przyległych i kątów wierzchołkowych oraz potrafi zastosować własności tych kątów w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna pojęcie dwusiecznej kąta i symetralnej	Uczeń: – potrafi zapisać miarę stopniową kąta, używając minut i sekund; – potrafi udowodnić twierdzenie dotyczące sumy miar kątów w trójkącie (czworokącie); – potrafi skonstruować styczną do okręgu, przechodzącą przez punkt leżący w odległości większej od środka okręgu niż długość promienia okręgu; potrafi skonstruować styczną do okręgu przechodzącą przez punkt leżący na okręgu; – wie, co to jest kąt dopisany do okręgu; zna twierdzenie o kątach wpisanym i dopisanym do okręgu, opartych na tym samym łuku; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące okręgów, stycznych, kątów środkowych, wpisanych i dopisanych, z zastosowaniem poznanych twierdzeń; – potrafi rozwiązywać zadania złożone, wymagające wykorzystania równocześnie kilku poznanych własności.	– Uczeń: – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące odcinków, prostych, półprostych, kątów i kół, w tym z zastosowaniem poznanych twierdzeń; – zna i potrafi udowodnić twierdzenie o dwusiecznych kątów przyległych; – umie udowodnić twierdzenia o kątach środkowych i wpisanych w koło; – umie udowodnić twierdzenie o kącie dopisanym do okręgu; – umie udowodnić własności figur geometrycznych w oparciu o poznane twierdzenia.

odcinka, potrafi zastosować własność dwusiecznej kąta oraz symetralnej odcinka w rozwiązywaniu prostych zadań, – umie skonstruować dwusieczną danego kąta i symetralną danego odcinka; – zna własności kątów utworzonych między dwiema prostymi równoległymi, przeciętymi trzecią prostą i umie zastosować je w rozwiązywaniu prostych zadań; potrafi uzasadnić równoległość dwóch prostych, znajdując równe kąty odpowiadające; – zna twierdzenie Talesa; potrafi je stosować do podziału odcinka w danym stosunku, do konstrukcji odcinka o danej długości, do obliczania długości odcinka w prostych zadaniach; – zna twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa i potrafi je stosować do uzasadnienia równoległości odpowiednich odcinków lub prostych; – zna wnioski z twierdzenia Talesa i potrafi je stosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna definicję koła i okręgu, poprawnie posługuje się terminami: promień, środek okręgu, cięciwa, średnica, łuk okręgu; – potrafi określić wzajemne położenie prostej i okręgu; – zna definicję stycznej do okręgu; – – zna twierdzenie o stycznej do okręgu i potrafi je wykorzystywać przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna twierdzenie o odcinkach stycznych i potrafi je stosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – umie określić wzajemne położenie dwóch		

okręgów; – posługuje się terminami: kąt wpisany w koło, kąt środkowy koła; zna twierdzenia dotyczące kątów wpisanych i środkowych i umie je zastosować przy rozwiązywaniu prostych zadań.		

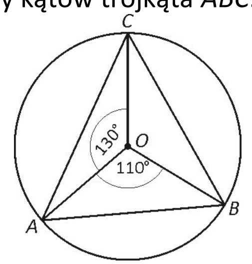
Przykładowe zadania

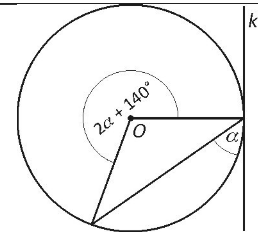
Zadanie 1. Punkt *C* dzieli odcinek *AB* długości 24 cm na dwa odcinki, których stosunek długości jest równy 6 : 2. Jaka jest długość każdego z odcinków? Zadanie 2. Różnica miar dwóch kątów przyległych wynosi 21°. Oblicz miary tych kątów. Zadanie 3. Na płaszczyźnie dane są punkty: *A*, *B*, *P*, *Q*, przy czym $A \neq B$, $\lvert AP\rvert = \sqrt{12}$ cm, $\lvert BP\rvert = 3\sqrt{2}$ cm, $\lvert AQ\rvert = \frac{49}{9}$ cm, $\lvert BQ\rvert = 5,(4)$ cm. Sprawdź, czy punkty *P*, *Q* należą do symetralnej odcinka *AB*. Z jakiej własności symetralnej skorzystasz? Zadanie 4. Dany jest odcinek długości *a*. Podziel ten odcinek: a) na 5 odcinków równej długości; b) w stosunku 2 : 7. Zadanie 5. W trapezie *ABCD*, $AB \parallel CD$, mamy dane: $\lvert AB\rvert = 12$ cm, $\lvert CD\rvert = 7$ cm, $\lvert AD\rvert = 8$ cm. O ile	Zadanie 1. Długości odcinków *AB*, *AC*, *BC*, *BD* i *CD* spełniają warunki: $\lvert AB\rvert = \lvert AC\rvert + \lvert BC\rvert$ oraz $\lvert BC\rvert + \lvert BD\rvert = \lvert CD\rvert$. Wykaż, że punkty *A*, *B*, *C*, *D* leżą na jednej prostej. Zadanie 2. Kąty *AOC* i *BOD* są kątami wierzchołkowymi. Wykaż, że przedłużenie dwusiecznej kąta *AOC* jest dwusieczną kąta *BOD*. Zadanie 3. W trójkącie *ABC* poprowadzono trzy proste równoległe do podstawy *AB*, dzielące bok *BC* na cztery odcinki równej długości. Suma długości odcinków tych prostych zawartych w trójkącie *ABC* jest o 6 dm większa od długości podstawy *AB*. Oblicz $\lvert AB\rvert$. Zadanie 4. Prosta *k* jest styczna do okręgu. Oblicz miarę kąta α dopisanego do okręgu:	Zadanie 1. Cięciwy *AB* i *CD* przecinają się pod kątem 36°. Wyznacz kąty środkowe, odpowiadające łukom *AC* i *BD*, jeżeli stosunek ich długości wynosi 1 : 3.  Zadanie 2. Do danego okręgu poprowadzono styczną tak, że końce *A* i *B* średnicy *AB* tego okręgu są odległe od stycznej o 25 cm i 15 cm. Oblicz długość średnicy *AB*. Zadanie 3. Wykaż, że prawdziwe jest twierdzenie: Jeśli istnieje okrąg, który jest styczny do wszystkich boków czworokąta wypukłego, to sumy długości dwóch przeciwległych boków tego czworokąta są sobie równe. Zadanie 4.

należy wydłużyć ramię *AD*, aby przecięło się z przedłużeniem ramienia *BC*?

Zadanie 6.
Miara kąta utworzonego przez dwa promienie okręgu wynosi 146°. Oblicz miarę kąta, który tworzą styczne poprowadzone przez końce tych promieni.

Zadanie 7.
Wyznacz miary kątów trójkąta *ABC*.



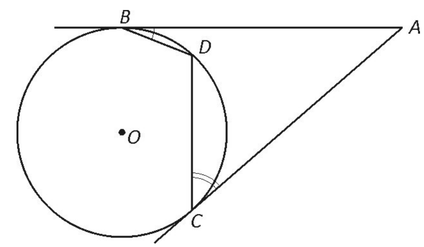


Zadanie 5.
Dane są dwa okręgi $o(A, r_1)$, $o(B, r_2)$ takie, że $r_1 = 3k + 1$, $r_2 = 2k + 3$, $|AB| = 6k - 3$. Określ położenie okręgów, w zależności od parametru k.

Zadanie 6.
Z punktu zewnętrznego *A* poprowadzono styczne *AB* i *AC* do okręgu o środku w punkcie *O* (*B*, *C* – punkty styczności). Wykaż, że jeśli miara kąta między stycznymi równa się mierze kąta zawartego między promieniami poprowadzonymi ze środka koła do punktów styczności, to czworokąt *ABOC* jest kwadratem.

Wykaż, że jeśli przez wszystkie wierzchołki czworokąta wypukłego można poprowadzić okrąg, to sumy miar przeciwległych kątów czworokąta są równe 180°.

Zadanie 5.
Punkt *D* leży na łuku *BC* wewnątrz trójkąta *ABC*. Wykaż, że suma $|\angle ABD| + |\angle ACD|$ jest stała (tzn. nie zależy od położenia punktu *D* na łuku *BC*). Czy teza zadania będzie prawdziwa, jeśli punkt *D* będzie leżał na łuku *BC* na zewnątrz trójkąta *ABC*?



5. Geometria płaska – trójkąty

Tematyka zajęć:

- Podział trójkątów. Suma kątów w trójkącie. Nierówność trójkąta. Odcinek łączący środki dwóch boków w trójkącie
- Twierdzenie Pitagorasa. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa
- Wysokości w trójkącie. Środkowe w trójkącie
- Symetralne boków trójkąta. Okrąg opisany na trójkącie
- Dwusieczne kątów trójkąta. Okrąg wpisany w trójkąt
- Przystawanie trójkątów
- Podobieństwo trójkątów

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna podział trójkątów ze względu na boki i kąty; – wie, ile wynosi suma miar kątów w trójkącie i w czworokącie; – zna warunek na długość odcinków, z których można zbudować trójkąt; – zna twierdzenie dotyczące odcinka łączącego środki dwóch boków trójkąta i potrafi je zastosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna twierdzenie Pitagorasa i umie je zastosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i wykorzystuje je do sprawdzenia, czy dany trójkąt jest prostokątny; – umie określić na podstawie długości boków trójkąta, czy trójkąt jest ostrokątny, czy rozwartokątny; – umie narysować wysokości w trójkącie i wie, że wysokości (lub ich przedłużenia) przecinają się w jednym punkcie; – zna twierdzenie o środkowych w trójkącie oraz potrafi je zastosować przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna pojęcie środka ciężkości trójkąta; – zna twierdzenie o symetralnych boków w trójkącie; – wie, że punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie i potrafi skonstruować ten okrąg; – zna twierdzenie o dwusiecznych kątów w trójkącie;	Uczeń: – zna zależności między bokami w trójkącie (nierówności trójkąta) i stosuje je przy rozwiązywaniu zadań; – potrafi udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki boków w trójkącie; – zna i umie zastosować w zadaniach własność wysokości w trójkącie prostokątnym, poprowadzonej na przeciwprostokątną; – potrafi obliczyć długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny i długość promienia okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym, mając dane długości boków trójkąta; – potrafi udowodnić proste własności trójkątów, wykorzystując cechy przystawania trójkątów; – potrafi uzasadnić, że symetralna odcinka jest zbiorem punktów płaszczyzny równoodległych od końców odcinka; – potrafi uzasadnić, że każdy punkt należący do dwusiecznej kąta leży w równej odległości od ramion tego kąta; – potrafi udowodnić twierdzenie o symetralnych boków i twierdzenie o dwusiecznych kątów w trójkącie; – umie udowodnić twierdzenie o odcinkach stycznych; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące okręgów wpisanych w trójkąt i okręgów opisanych na trójkącie; – potrafi stosować cechy podobieństwa trójkątów do rozwiązania zadań z wykorzystaniem	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności, dotyczących trójkątów, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń; – potrafi udowodnić twierdzenie o środkowych w trójkącie; – potrafi udowodnić twierdzenie dotyczące wysokości w trójkącie prostokątnym, poprowadzonej na przeciwprostokątną.

– wie, że punkt przecięcia się dwusiecznych kątów w trójkącie jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt i potrafi skonstruować ten okrąg; – zna i stosuje przy rozwiązywaniu prostych zadań własności trójkąta równobocznego: długość wysokości w zależności od długości boku, długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie, długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt; – –zna i stosuje własności trójkąta prostokątnego: suma miar kątów ostrych trójkąta, długość wysokości w trójkącie prostokątnym równoramiennym w zależności od długości przyprostokątnej; długość promienia okręgu opisanego na trójkącie i długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt w zależności od długości boków trójkąta, zależność między długością środkowej poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego a długością przeciwprostokątnej; – zna podstawowe własności trójkąta równoramiennego i stosuje je przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna trzy cechy przystawania trójkątów i potrafi je zastosować przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna cechy podobieństwa trójkątów; potrafi je stosować do rozpoznawania trójkątów podobnych i przy rozwiązaniach prostych zadań; – umie obliczyć skalę podobieństwa trójkątów podobnych.	innych, wcześniej poznanych własności; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące trójkątów, z zastosowaniem poznanych do tej pory twierdzeń.	

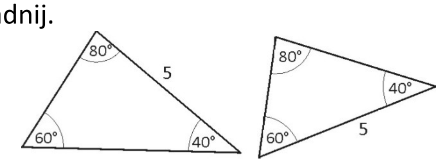
Przykładowe zadania

Zadanie 1.
W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie jest dwa razy większy niż kąt przy wierzchołku. Wyznacz kąty tego trójkąta.

Zadanie 2.
Wielkość telewizora wyraża się długością przekątnej ekranu mierzonej w calach (1 cal = = 2,54 cm). Oblicz, ile cali ma telewizor, którego wymiary ekranu wynoszą 42 cm na 31,5 cm. Wynik podaj z dokładnością do 1 cala.

Zadanie 3.
Dane są odcinki długości a, b oraz c. Skonstruuj odcinek długości: $\dfrac{\sqrt{3}ac}{\sqrt{2}b}$.

Zadanie 4.
Czy poniższe trójkąty są przystające? Odpowiedź uzasadnij.



Zadanie 5.
W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AB| = 12$ cm, $|BC| = 8$ cm, $|AC| = 10$ cm. Punkt D dzieli bok AB na takie dwa odcinki, że $|AD| : |DB| = 3 : 5$. Przez punkt D poprowadzono prostą równoległą do boku AC, która przecięła bok BC w punkcie E. Oblicz długości odcinków: CE, BE i DE.

Zadanie 1.
Dwa boki trójkąta mają długość 1 cm i 4 cm. Oblicz obwód tego trójkąta, jeżeli wiadomo, że długość trzeciego boku wyraża się liczbą naturalną.

Zadanie 2.
W trójkącie prostokątnym ABC przedłużono przeciwprostokątną AB i obrano na przedłużeniach punkty D i E tak, że $|AD| = |AC|$ oraz $|BE| = |BC|$. Oblicz miarę kąta DCE.

Zadanie 3.
W trójkącie boki mają długość: 17 cm, 25 cm, 28 cm.
a) Sprawdź, czy ten trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.
b) Oblicz długość wysokości poprowadzonej na najdłuższy bok.
c) Podaj długość odcinków, na jakie spodek wysokości podzielił najdłuższy bok trójkąta.

Zadanie 4.
Udowodnij, że w trójkącie równoramiennym dwusieczne kątów przy podstawie są równej długości.

Zadanie 5.
W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długość: $|AB| = 32$ cm, $|AC| = 24$ cm. Symetralna boku BC przecina ten bok w punkcie D, bok AB w punkcie E i przedłużenie boku AC w punkcie F. Udowodnij, że trójkąt EBD jest

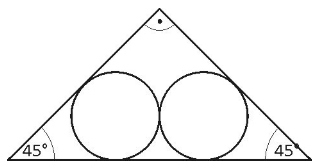
Zadanie 1.
Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu płaszczyzny od wierzchołków czworokąta jest większa od połowy obwodu tego czworokąta.

Zadanie 2.
W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę jest równa odcinkowi, który łączy środek podstawy ze środkiem ramienia. Podstawa trójkąta ma długość a. Jaką długość ma wysokość opuszczona na podstawę?

Zadanie 3.
Niech a, b, c będą długościami boków w dowolnym trójkącie. Wykaż, że prawdziwa jest nierówność: $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

Zadanie 4.
Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = |AC|$ oraz $|\angle ABC| = 3|\angle BAC|$. Wykaż, że jeżeli półproste $\overrightarrow{BK}$ i $\overrightarrow{BL}$ dzielą kąt $\angle ABC$ na trzy równe części ($|\angle LBC| = \frac{1}{3}|\angle ABC|$), to trójkąty BCL, BCK, BKA są równoramienne.

Zadanie 5.
Okręgi o promieniach długości 2 cm i 3 cm są styczne zewnętrznie w punkcie A. Znajdź odległość punktu A od prostej, do której nie należy punkt A, a która jest styczna jednocześnie do obu okręgów.

Zadanie 6. W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną ma długość 4 cm. Spodek tej wysokości leży w odległości $1\frac{1}{6}$ cm od środka okręgu opisanego na trójkącie. Oblicz: a) długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie; b) długość boków tego trójkąta. Zadanie 7. W trójkąt prostokątny równoramienny wpisano dwa okręgi, styczne zewnętrznie do siebie, każdy o promieniu 1 cm (jak na rysunku poniżej).  Oblicz obwód tego trójkąta.	podobny do trójkąta *EAF* i oblicz skalę tego podobieństwa. Zadanie 6. Dany jest trójkąt równoboczny *ABC*. Punkty *P*, *Q*, *R* leżą na bokach trójkąta *ABC* (po jednym na każdym boku) w taki sposób, że każdy bok trójkąta *PQR* jest prostopadły do jednego boku trójkąta *ABC*. a) Wykaż, że trójkąt *PQR* jest równoboczny. b) Wyznacz stosunek $\frac{\vert AB\vert}{\vert PQ\vert}$.	

6. Trygonometria kąta wypukłego

Tematyka zajęć:

- Określenie sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa w trójkącie prostokątnym
- Wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dla kątów 30°, 45°, 60°
- Sinus, cosinus, tangens i cotangens dowolnego kąta wypukłego
- Podstawowe tożsamości trygonometryczne
- Wybrane wzory redukcyjne
- Trygonometria – zadania różne

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o danych długościach boków; – potrafi korzystać z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora); – zna wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach 30°, 45°, 60°; – potrafi rozwiązywać trójkąty prostokątne; – potrafi obliczać wartości wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne kątów o miarach 30°, 45°, 60°; – zna definicje sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dowolnego kata wypukłego; – potrafi wyznaczyć (korzystając z definicji) wartości funkcji trygonometrycznych takich kątów wypukłych, jak: 120°,135°, 150°; – zna znaki funkcji trygonometrycznych kątów wypukłych, różnych od 90°; zna wartości funkcji trygonometrycznych (o ile istnieją) kątów o miarach: 0°, 90°, 180°; – potrafi obliczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta wypukłego, gdy dana jest jedna z nich; – zna i potrafi stosować podstawowe tożsamości trygonometryczne (w odniesieniu do kąta wypukłego): $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$; – zna wzory redukcyjne dla kąta $90° - \alpha$, $90° + \alpha$ oraz $180° - \alpha$;	Uczeń: – potrafi dowodzić różne tożsamości trygonometryczne; – potrafi wykorzystać kilka zależności trygonometrycznych w rozwiązaniu zadania; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności, wykorzystując także wcześniej poznaną wiedzę o figurach geometrycznych.	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności, wymagające niekonwencjonalnych pomysłów i metod.

– potrafi stosować poznane wzory redukcyjne w obliczaniu wartości wyrażeń; – potrafi zastosować poznane wzory redukcyjne w zadaniach geometrycznych; – potrafi zbudować kąt wypukły znając wartość jednej z funkcji trygonometrycznych tego kąta.		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Oblicz wartość wyrażenia: $\sin 30° \cdot \cos 60° + \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{ctg} 30°$. <u>Zadanie 2.</u> W trójkącie prostokątnym *ABC* dane są: długość przeciwprostokątnej $\lvert BC\rvert = \sqrt{146}$ cm oraz długość przyprostokątnej $\lvert AB\rvert = 5$ cm. a) Oblicz długość drugiej przyprostokątnej. b) Oblicz miary kątów ostrych trójkąta (skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych). c) Oblicz długość wysokości trójkąta poprowadzonej na przeciwprostokątną oraz cosinus kąta, jaki tworzy ta wysokość z krótszą przyprostokątną. <u>Zadanie 3.</u> Kąt wzniesienia wieży, zmierzony w odległości 80 m od jej podstawy, ma miarę 48°. Jaką wysokość ma wieża? <u>Zadanie 4.</u> Wyznacz, korzystając z definicji, wartości funkcji trygonometrycznych kąta 120°.	<u>Zadanie 1.</u> Zbuduj kąt o mierze α, $\alpha \in (0°, 180°)$ takiej, że a) $\sin\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ b) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{7}$. Wyznacz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α. <u>Zadanie 2.</u> Posługując się wzorem $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, oblicz $\sin 15°$. <u>Zadanie 3.</u> W trójkącie prostokątnym *a*, *b* oznaczają długości przyprostokątnych, α jest miarą kąta leżącego naprzeciw przyprostokątnej długości *a*. Wiedząc, że $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$, oblicz: a) tangens α b) wartość wyrażenia: $\frac{b}{a+b} + \frac{a^2}{a^2 - b^2}$. <u>Zadanie 4.</u> Sprawdź, czy równość	<u>Zadanie 1.</u> Wiedząc, że α jest kątem ostrym oraz $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, oblicz $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$. <u>Zadanie 2.</u> Balon wznosi się pionowo. W chwili, gdy znajduje się na wysokości *h* metrów nad ziemią, osoba lecąca balonem mierzy kąt depresji α przedmiotu znajdującego się na ziemi. Po upływie *t* sekund powtarza pomiar i otrzymuje kąt β. Z jaką średnią prędkością *v* wznosi się balon?

<u>Zadanie 5.</u> Oblicz, stosując odpowiednie wzory redukcyjne, wartość wyrażenia: a) $\sin 135° + \mathrm{tg}\, 120° \cdot \cos 150°$ b) $\sin^2 17° + \sin^2 73° - \cos 120°$. <u>Zadanie 6.</u> Oblicz, bez użycia tablic i kalkulatora: $\mathrm{tg}\, 30° \cdot \mathrm{tg}\, 40° \cdot \mathrm{tg}\, 130°$. <u>Zadanie 7.</u> Zbuduj kąt o mierze α, $\alpha \in (90°, 180°)$ takiej, że a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ b) $\mathrm{ctg}\, \alpha = -4$. Wyznacz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.	$\frac{coa\alpha + \mathrm{tg}\alpha}{\sin\alpha \cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}$ jest tożsamością trygonometryczną, wiedząc, że $\alpha \in (0°, 90°)$. <u>Zadanie 5.</u> Niech α, β, γ oznaczają miary kątów dowolnego trójkąta. Wykaż, że prawdziwa jest zależność: $\sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\beta + \gamma}{2}$.	

7. Geometria płaska – pole koła, pole trójkąta

Tematyka zajęć:
- Pole figury geometrycznej
- Pole trójkąta, cz. 1
- Pole trójkąta, cz. 2
- Pola trójkątów podobnych
- Pole koła, pole wycinka koła

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – rozumie pojęcie pola figury; zna wzór na pole	Uczeń: – potrafi wyprowadzić wzór na pole trójkąta	Uczeń: – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania

kwadratu i pole prostokąta; – zna następujące wzory na pole trójkąta: $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, gdzie a – długość boku trójkąta równobocznego $P = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, $P = a \cdot b \cdot \sin \gamma$, gdzie $\gamma \in (0°, 180°)$ $P = \frac{abc}{4R}$, $P = \frac{1}{2} p \cdot r$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$ $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$; – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące trójkątów, wykorzystując wzory na pole trójkąta i poznane wcześniej twierdzenia; – potrafi obliczyć wysokość trójkąta, korzystając ze wzoru na pole; – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące trójkątów, wykorzystując wzory na ich pola i poznane wcześniej twierdzenia, w szczególności twierdzenie Pitagorasa oraz własności okręgu wpisanego w trójkąt i okręgu opisanego na trójkącie; – zna twierdzenie o polach figur podobnych; potrafi je stosować przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna wzór na pole koła i pole wycinka koła; umie zastosować te wzory przy rozwiązywaniu prostych zadań;	równobocznego i wzory: $P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$, $P = \frac{1}{2} p \cdot r$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$, ze wzoru $P = \frac{1}{2} ah_a$; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o średnim stopniu trudności, wykorzystując wzory na pola trójkątów, w tym również z wykorzystaniem poznanych wcześniej własności trójkątów; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne, wykorzystując cechy podobieństwa trójkątów, twierdzenie o polach figur podobnych i uwzględniając wcześniej poznane twierdzenia geometryczne.	geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem wzorów na pola figur i innych twierdzeń.

wie, że pole wycinka koła jest wprost proporcjonalne do miary odpowiadającego mu kąta środkowego koła i jest wprost proporcjonalne do długości odpowiadającego mu łuku okręgu oraz umie zastosować tę wiedzę przy rozwiązywaniu prostych zadań.		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Z kawałka trójkątnego materiału o obwodzie 1,12 m i polu 504 cm^2 wycięto koło, styczne do boków tego trójkąta. Oblicz długość promienia wyciętego koła. <u>Zadanie 2.</u> Boki trójkąta mają długość 21 cm, 17 cm, 10 cm. Oblicz: a) pole trójkąta; b) długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt; c) długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. <u>Zadanie 3.</u> W trójkącie dwa boki mają długość 12 cm i 10 cm, zaś kąt zawarty między tymi bokami ma miarę 150°. Oblicz pole tego trójkąta. <u>Zadanie 4.</u> W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 6 cm i 8 cm. Korzystając ze wzoru na pole trójkąta, oblicz odległość wierzchołka kąta prostego od przeciwprostokątnej.	<u>Zadanie 1.</u> W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz stosunek pola koła wpisanego w ten trójkąt do pola koła opisanego na tym trójkącie. <u>Zadanie 2.</u> W trójkącie rozwartokątnym, którego pole jest równe 27 cm^2, dwa boki mają długość 18 cm i 6 cm. Jaką miarę ma kąt zawarty między tymi bokami? <u>Zadanie 3.</u> Na trójkącie ABC, w którym $\|AC\| = \|BC\|$, opisano okrąg o środku O i promieniu $R = 20$ cm. Wiedząc, że $\|\angle AOB\| = 120^\circ$, oblicz pole trójkąta oraz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Rozważ dwa przypadki. <u>Zadanie 4.</u> W trójkącie równoramiennym podstawa ma 16 cm długości, a ramię ma 17 cm długości. Oblicz odległość środka wysokości poprowadzonej na podstawę trójkąta od ramienia trójkąta.	<u>Zadanie 1.</u> W trójkącie poprowadzono środkowe, które podzieliły dany trójkąt na sześć mniejszych trójkątów. Wykaż, że pola powstałych trójkątów są równe. <u>Zadanie 2.</u> Wyznacz długość boku c trójkąta, jeśli dane są długości a, b dwóch jego boków oraz wiadomo, że $h_a + h_b = h_c$, gdzie h_a, h_b, h_c są długościami wysokości opuszczonych na odpowiednie boki tego trójkąta. <u>Zadanie 3.</u> Wykaż, że okrąg wpisany w trójkąt prostokątny jest styczny do przeciwprostokątnej w punkcie dzielącym ją na dwa odcinki, których iloczyn długości jest równy polu tego trójkąta. <u>Zadanie 4.</u> Wykaż, że pole trójkąta wyraża się wzorem: $P = \dfrac{abc}{4R}$, gdzie a, b, c oznaczają długości boków trójkąta, R to długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie, jeśli trójkąt jest:

<u>Zadanie 5.</u> Kąt wpisany w koło ma miarę 45° i jest oparty na łuku długości 3π cm. Oblicz pole wycinka koła wyznaczonego przez ten łuk. <u>Zadanie 6.</u> Trójkąt równoboczny $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC w skali $s = 3$. Pole trójkąta ABC jest równe $4\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz długość boku trójkąta $A'B'C'$.	<u>Zadanie 5.</u> Prosta równoległa do podstawy AB trójkąta ABC, przecinająca ramiona AC i BC odpowiednio w punktach D i E, dzieli ten trójkąt na dwie figury o równych polach. W jakim stosunku (licząc od wierzchołka C) dzieli ona ramiona trójkąta? <u>Zadanie 6.</u> W wycinek koła o promieniu 6 cm wpisano okrąg o promieniu 2 cm. Oblicz pole wycinka koła.	a) prostokątny b) ostrokątny.

Plan wynikowy zmodyfikowany przez nauczyciela